

<> Question:

Quelles sont les longueurs des côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  d'un triangle rectangle qui a une aire et un périmètre égaux chacun à 30 ( $a$  et  $b$  sont les côtés de l'angle droit et  $c$  est l'hypoténuse) ?

<> Réponse:

$$a + b + c = 30 \text{ (périmètre)}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 30$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 30 - a - b$$

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = (30 - a - b)^2$$

$$a^2 + b^2 = (30 - a - b)^2$$

$$a^2 + b^2 = (30 - a - b)(30 - a - b)$$

$$a^2 + b^2 = 900 - 30a - 30b - 30a + a^2 + ab - 30b + ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 900 + 30a + 30b + 30a - a^2 - ab + 30b - ab - b^2 = 0$$

$$a^2 - a^2 + b^2 - b^2 + 30a + 30a + 30b + 30b - ab - ab - 900 = 0$$

$$60a + 60b - 2ab - 900 = 0$$

$$\text{note: } ab/2 = 30 \text{ (aire)} \Rightarrow ab = 60$$

comme <<  $ab = 60$  >> alors <<  $60a + 60b - 2ab - 900 = 0$  >> devient:

$$60a + 60b - 120 - 900 = 0$$

$$60a + 60b = 120 + 900$$

$$60(a + b) = 1020$$

$$a + b = 1020/60$$

$$a + b = 17$$

$$\text{comme } \langle\langle a + b + c = 30 \rangle\rangle \text{ et } \langle\langle a + b = 17 \rangle\rangle \Rightarrow c = 13$$

$$a + b = 17 \Rightarrow b = 17 - a$$

comme  $\langle\langle b = 17 - a \rangle\rangle$  alors  $\langle\langle ab = 60 \rangle\rangle$  devient:

$$a(17 - a) = 60$$

$$17a - a^2 = 60$$

$$-a^2 + 17a - 60 = 0 \text{ (équation du 2e degré } \Rightarrow \text{ calcul du discriminant)}$$

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-60) = 289 - 240 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$a \text{ (solution \#1)} = \frac{-17 + 7}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$a \text{ (solution \#2)} = \frac{-17 - 7}{2 \cdot (-1)} = \frac{-24}{-2} = 12$$

$$\text{si } a + b + c = 30 \text{ et } a = 5 \text{ (solution \#1) et } c = 13 \Rightarrow b = 12$$

$$\text{si } a + b + c = 30 \text{ et } a = 12 \text{ (solution \#2) et } c = 13 \Rightarrow b = 5$$

<> Résultats et vérification:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a = 5 & b = 12 & c = 13 \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline a = 12 & b = 5 & c = 13 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 5; b = 12; c = 13 \Rightarrow \text{périmètre} = 5 + 12 + 13 = 30 \text{ et aire} = \frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ <-- Ok!}$$

$$a = 12; b = 5; c = 13 \Rightarrow \text{périmètre} = 12 + 5 + 13 = 30 \text{ et aire} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ <-- Ok!}$$

<> ("bonus" page suivante)



$$(30 - c)^2 = 120 + c^2$$

$$900 - 60c + c^2 = 120 + c^2$$

$$c^2 - c^2 - 60c = 120 - 900$$

$$-60c = -780$$

$$c = -780/-60 = 13$$

-> si  $\ll a + b + c = 30 \gg$  et  $\ll c = 13 \gg$  alors:

$$a + b + 13 = 30$$

$$a + b = 30 - 13$$

$$a + b = 17$$

(la suite est identique au précédent développement)

<> FIN