```
<> Question:

   | x + 1/x = 5
   |
   | x⁵ + 1/x⁵ = ?

<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>
<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>
<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>

<> Réponse (ma réponse) avec calcul d'un discriminant:

   01 • x + x/1 = 5

   02 • => x(x + 1/x) = 5x

   03 • => x² + x/x = 5x

   04 • => x² + 1 = 5x

   05 • => x² - 5x + 1 = 0

   06 • discriminant: delta = b² - 4ac = (-5)² - (4*1*1) = 25 - 4 = 21

   07 • delta > 0 => 2 racines:

        - racine #1: x = [-b + sqrt(delta)]/2 = [5 + sqrt(21)]/2 = 4,791287

        - racine #2: x = [-b - sqrt(delta)]/2 = [5 - sqrt(21)]/2 = 0,208712

                                                                        +------+
   08 • x = 4,791287 => x⁵ + 1/x⁵ = 4,791287⁵ + 1/4,791287⁵ = 2524,99 = | 2525 |
                                                                        +------+
   09 • x = 0,208712 => x⁵ + 1/x⁵ = 0,208712⁵ + 1/0,208712⁵ = 2525,00 = | 2525 |
                                                                        +------+
   10 • réponse finale:

        | x + 1/x = 5
        |             +------+
        | x⁵ + 1/x⁵ = | 2525 |
```

```
                      +------+
<> FIN

<<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
<><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><><>
```

<> Réponse (ma réponse) sans calcul d'un discriminant:

00 • ATTENTION:

1) Cette méthode peut présenter une réelle difficulté de raisonnement à l'étape #21 (factorisation) car les nombres à manipuler sont à 7 chiffres (1 chiffre avant la virgule et 6 décimales).

2) L'étape #1 (ci-dessous) démarre à partir de l'étape #05 (ci-dessus).

01 • $x^2 - 5x + 1 = 0$

02 • $ac = 1*1 = 1$

03 • $b = -5$

04 • P (comme Produit) = ac = 1

05 • S (comme Somme) = -5

```
                                  +---> P = u + v = 1
06 • calculer u et v tels que -->|
                                  +---> S = u + v = -5
```

07 • $d = (u - v)/2$

08 • $u = S/2 + d \Rightarrow u = -5/2 + d \Rightarrow u = -2{,}5 + d$

09 • $v = S/2 - d \Rightarrow v = -5/2 - d \Rightarrow v = -2{,}5 - d$

10 • $P = (S/2 + d)*(S/2 - d) \Rightarrow 1 = (-2{,}5 + d)(-2{,}5 - d)$

11 • rappel (identité remarquable): $(a + b)*(a - b) = a^2 - b^2$

12 • => $1 = -2,5^2 - d^2$

13 • => $d^2 = -2,5^2 - 1$

14 • => $d^2 = 6,25 - 1$

15 • => $d = \text{sqrt}(5,25) = 2,291287$

16 • sachant que << $u = S/2 + d$ >> alors $u = -2,5 + 2,291287 =$ | -0,208713 |

17 • sachant que << $v = S/2 - d$ >> alors $u = -2,5 - 2,291287 =$ | -4,791287 |

18 • vérification:

>> $P = u * v$ => $P = -0,208713 * -4,791287 = 1$

>> $S = u + v$ => $S = -0,208713 + -4,791287 = -5$

19 • => << $x^2 - 5x + 1 = 0$ >> est équivalent à << $x^2 - 0,208713x - 4,791287x + 1 = 0$ >>

20 • puis à: $(x^2 - 0,208713x) - (4,791287x - 1) = 0$

21 • puis à: $x(x - 0,208713) - 4,791287(x - 0,208713) = 0$

22 • puis à: $(x - 0,208713)(x - 4,791287) = 0$

23 • => les 2 racines de << $x^2 - 5x + 1 = 0$ >> sont -->| +---> $x - 0,208713 = 0$ => | $x = 0,208713$ |
+---> $x - 4,791287 = 0$ => | $x = 4,791287$ |

24 • $x = 4,791287 \Rightarrow x^5 + 1/x^5 = 4,791287^5 + 1/4,791287^5 = 2524,99 =$ | 2525 |

25 • $x = 0,208713 \Rightarrow x^5 + 1/x^5 = 0,208713^5 + 1/0,208713^5 = 2524,94 =$ | 2525 |

26 • réponse finale:

| $x + 1/x = 5$
| $x^5 + 1/x^5 =$ | 2525 |

```
                    +------+
<> FIN

<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>
<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>
<<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>><<>>

<> Réponse (de PreMath sur YouTube (*)):

   01 • à retenir:

   02 • 1/x⁵ = 1⁵/x⁵ = (1/x)⁵

   03 • 1/x³ = 1³/x³ = (1/x)³

   04 • 1/x² = 1²/x² = (1/x)²

   05 • <<>><<>><<>> ÉTAPE #1 <<>><<>><<>>

   06 • rappel: (a + b)² = a² + 2ab + b²

   07 • => a² + b² = (a + b)² - 2ab

   08 • si a = x et b = 1/x alors << a² + b² = (a + b)² - 2ab >> devient:

   09 • x² + 1/x² = (x + 1/x)² - 2

   10 • comme << x + 1/x = 5 >> alors << x² + 1/x² = (x + 1/x)² - 2 >> devient:

   11 • x² + 1/x² = (5)² - 2

   12 • => x² + 1/x² = 25 - 2

           +----------------+
   13 • => | x² + 1/x² = 23 | (sera utile à partir de l'étape #27)
           +----------------+

   14 • <<>><<>><<>> ÉTAPE #2 <<>><<>><<>>

   15 • rappel: (a + b)³ = a³ + 3a²b + 3ab² + b³
```

16 • comme << $3a^2b + 3ab^2$ >> peut s'écrire << $3ab(a + b)$ >> ...

... alors << $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ >> devient:

17 • $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

18 • => $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$

19 • => $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

20 • si $a = x$ et $b = 1/x$ alors << $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ >> devient:

21 • $x^3 + 1/x^3 = (x + 1/x)^3 - 3(x + 1/x)$

22 • comme << $x + 1/x = 5$ >> alors << $x^3 + 1/x^3 = (x + 1/x)^3 - 3(x + 1/x)$ >> devient:

23 • $x^3 + 1/x^3 = 5^3 - 3*5$

24 • => $x^3 + 1/x^3 = 125 - 15$

```
   +-----------------+
25 • => | x³ + 1/x³ = 110 |
   +-----------------+
```

26 • récapitulatif:

27 • on sait que: $x^2 + 1/x^2 = 23$ (voir à l'étape #13)

28 • on sait que: $x^3 + 1/x^3 = 110$

30 • <<>><<>><<>> ÉTAPE #3 <<>><<>><<>>

31 • rappel: $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5$

32 • comme << $a^2b^3 + a^3b^2$ >> peut s'écrire << $a^2b^2(a + b)$ >> ou << $(ab)^2(a + b)$ >> ...

... alors << $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5$ >> devient:

33 • $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^5 + b^5 + (ab)^2(a + b)$

34 • => $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - (ab)^2(a + b) = a^5 + b^5$

35 • => $a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - (ab)^2(a + b)$

36 • si $a = x$ et $b = 1/x$ alors << $a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - (ab)^2(a + b)$ >> devient:

37 • $x^5 + 1/x^5 = (x^2 + 1/x^2)(x^3 + 1/x^3) - (x + 1/x)$

38 • comme << $x + 1/x = 5$ >> et << $x^2 + 1/x^2 = 23$ >> et << $x^3 + 1/x^3 = 110$ >> ...

39 • alors << $x^5 + 1/x^5 = (x^2 + 1/x^2)(x^3 + 1/x^3) - (x + 1/x)$ >> devient:

40 • $x^5 + 1/x^5 = 23 * 110 - 5 = 2525$

41 • réponse finale:

```
| x + 1/x = 5
|             +------+
| x⁵ + 1/x⁵ = | 2525 |
              +------+
```

<> FIN

(*) https://www.youtube.com/watch?v=6auh7Sh1AL0