<> Question:
----

soit m et n les 2 racines de << $x^2 + 10x + 20 = 0$ >>

que vaut $m^4 + n^4$?

(remerciements à Iman et Navid de la chaîne YouTube Hedacademy)

<> Réponse:

$x^2 + 10x + 20 = 0$

$a = 1$

$b = 10$

$c = 20$

rappel:

on sait que le produit de 2 racines est: c/a

on sait que la somme de 2 racines est: $-b/a$

$m * n = c/a = 20/1 = 20$
$m + n = -b/a = -10/1 = -10$

<<>><<>><<>> I. MÉTHODE PAR LE PRODUIT ET LA SOMME DES RACINES <<>><<>><<>>

---

le point de départ sera l'identité remarquable << $(m^2 + n^2)^2$ >>

car on trouve m^4 et n^4 dans son développement:

$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2*m^2*n^2 + n^4$

$2*m^2*n^2 = 2*(mn)^2$

$mn = 20$ donc $2(mn)^2 = 800$

<<>><<>><<>>

$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

$mn = 20$ donc $2mn = 40$

<<>><<>><<>>

$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

$(-10)^2 = m^2 + 40 + n^2$

$100 = m^2 + 40 + n^2$

$m^2 + n^2 = 100 - 40 = 60$

<<>><<>><<>>

$(m^2 + n^2)^2 = 60^2 = 3600$

dans << $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2*m^2*n^2 + n^4$ >>

on peut remplacer:

1) $(m^2 + n^2)^2$ par 3600

2) $2*m^2*n^2$ par 800

et on obtient:

$3600 = m^4 + 800 + n^4$

$m^4 + n^4 = 3600 - 800 = 2800$

$\boxed{m^4 + n^4 = 2800}$

```
+------------------+

--------------------------------------------------------------
<<>><<>><<>> II. MÉTHODE PAR LA VALEUR DES RACINES <<>><<>><<>>
--------------------------------------------------------------

m = [-b + sqrt(b - 4ac)]/2a

m = -5 + sqrt(5)

n = -5 - sqrt(5)

<<>><<>><<>> racine m à la puissance 4 <<>><<>><<>>

m^4 = m²*m²

m² = [-5 + sqrt(5)]² = 25 - 10*sqrt(5) + 5

m²*m² = (25 - 10*sqrt(5) + 5)*(25 - 10*sqrt(5) + 5)

= 625 - 250*sqrt(5) + 125 - 250*sqrt(5) + 500 - 50*sqrt(5) + 125 - 50*sqrt(5) + 25

= 625 + 125 + 500 + 125 + 25 - 250*sqrt(5) - 250*sqrt(5) - 50*sqrt(5) - 50*sqrt(5)

= 1400 - 600*sqrt(5)

+--------------------------+
| m^4 = 1400 - 600*sqrt(5) |
+--------------------------+

<<>><<>><<>> racine n à la puissance 4 <<>><<>><<>>

n^4 = n²*n²

n² = [-5 - sqrt(5)]² = 25 + 10*sqrt(5) + 5

n²*n² = (25 + 10*sqrt(5) + 5)*(25 + 10*sqrt(5) + 5)

= 625 + 250*sqrt(5) + 125 + 250*sqrt(5) + 500 + 50*sqrt(5) + 125 + 50*sqrt(5) + 25

= 625 + 125 + 500 + 125 + 25 + 250*sqrt(5) + 250*sqrt(5) + 50*sqrt(5) + 50*sqrt(5)
```

```
= 1400 + 600*sqrt(5)

+--------------------------+
| n^4 = 1400 + 600*sqrt(5) |
+--------------------------+

<<>><<>><<>> calcul de m^4 + n^4 <<>><<>><<>>

m^4 + n^4 = 1400 - 600*sqrt(5) + 1400 + 600*sqrt(5)

m^4 + n^4 = 1400 + 1400 - 600*sqrt(5) + 600*sqrt(5)

m^4 + n^4 = 1400 + 1400

+------------------+
| m^4 + n^4 = 2800 |
+------------------+

---------------------------------------------------------
<<>><<>><<>> III. RAISONNEMENT DE LAURENT M. <<>><<>><<>>
---------------------------------------------------------

(x - m)(x - n) = 0 = x² + 10x + 20

x² - nx - mx + mn = x² + 10x + 20

x² - x(m + n) + mn = x² + 10x + 20

x² - x² - x(m + n) + mn = 10x + 20

-x(m + n) + mn = 10x + 20

-(m + n) = 10

m + n = -10

mn = 20

<<>><<>><<>>
```

$$(m + n)^2 = (-10)^2 = 100 = m^2 + 2mn + n^2$$

$$m^2 + n^2 = 100 - 2nm$$

$$m^2 + n^2 = 100 - 2*20$$

$$m^2 + n^2 = 60$$

<<>><<>><<>>

$$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2*m^2*n^2 + n^4$$

$$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + 2*(mn)^2 + n^4$$

$$60^2 = m^4 + 2*20^2 + n^4$$

$$m^4 + n^4 = 3600 - 800 = 2800$$

$$\boxed{m^4 + n^4 = 2800}$$